Hvor mange bankoplader er der?

Nils Andersen

3. juni 2003

Banko er et lotteri, hvor deltagerne køber spilleplader med fortrykte numre. Lederen af spillet udtrækker i tilfældig rækkefølge numrene, som råbes op, og spillerne markerer de udtrukne numre på deres plader. Den første, som får en vandret række eller alle en plades numre markeret, har gevinst og råber "banko!".

1 Specifikation

"Spørg naturvidenskaben" har fået stillet spørgsmålet om, hvor mange forskellige spilleplader der kan fremstilles i en nærmere specificeret (meget udbredt) version af spillet.

Specifikationerne er som følger

1. Der benyttes numrene fra og med 1 til og med 90.
2. En spilleplade er rektangulær, med 3 (vandrette) rækker og 9 (lodrette) søjler, og hver spilleplade rummer 15 forskellige numre. Hver plade har derfor ud over numrene 12 blanke felter.
3. Numrene er sådan fordelt på pladen, at der mindst er et tal i hver søjle og netop 5 tal i hver række.
4. Idet søjlerne benævnes s_0, s_1, s_2, ..., s_7, s_8, skal et encifret nummer stå i s_0 og et tocifret nummer i søjlen svarende til nummerets forreste ciffer (tier-cifferet); også nummer 90 placeres i s_8. De tal, hver søjle kan rumme, er med andre ord s_0: 1 til 9, s_1: 10 til 19, s_2: 20 til 29 og så fremdeles op til s_7: 70 til 79 og s_8: 80 til 90.
5. I den enkelte søjle placeres numrene i stigende orden læst ovenfra og ned.

Spørgeren angiver dette eksempel på en banko-plade:

2	10			42		61		86
	14		30		53		70	87
7		21	32			65		90

(1)

Spørgsmålet er nu, hvor mange forskellige plader der kan konstrueres, som opfylder kravene 1.–5. Spørgeren har en formodning om, at antallet er så stort, at hvert menneske på jorden kunne få adskillige plader at spille på, uden at der blev brug for dubletter.

2 Analyse

Det er vigtigt at bemærke, at numrenes placering på pladen har betydning. Nedenstående plade (med en anden placering af 42 og 53) er således forskellig fra (1):

2	10				53	61		86
	14		30	42			70	87
7		21	32			65		90

(2)

Grunden er naturligvis, at de to plader kan give forskellig gevinst, når der spilles på rækker, men forholdet betyder, at selv om hver plade angiver en delmængde på 15 elementer fra mængden $\{1, 2, 3, \ldots, 89, 90\}$, så er korrespondancen mellem delmængder og plader meget mangelfuld: På den ene side betyder krav 4, at ikke alle delmængder svarer til en bankoplade (for der skal være mindst et tal med hvert tierciffer og højst tre tal med samme tierciffer), på den anden side kan samme delmængde svare til flere plader (som for eksempel (1) og (2), der har de samme 15 numre).

Som det ofte er tilfældet med problemer hentet fra den virkelige verden, er der ikke nogen af kombinatorikkens skabeloner, som lige passer i det aktuelle tilfælde, men vi kan nærme os et svar på spørgsmålet ved at begynde med grove forenklinger og gradvis inddrage flere og flere af kravene 1.–5.

3 Femten udvalgt blandt halvfemsindstyve

Selvom vi lige har indset, det ikke fører til det rigtige svar, kunne det måske alligevel være interessant at overveje, på hvor mange måder man kan vælge 15 forskellige af tallene 1–90. I det mindste kan kombinatorikken her levere en færdig formel, for det er jo den velkendte *binomialkoefficient* $\binom{90}{15}$, der kan beregnes som $\frac{90!}{15! \cdot 75!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82 \cdot 81 \cdot 80 \cdot 79 \cdot 78 \cdot 77 \cdot 76}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ og har værdien 45795.673964.460816, altså mere end 45 billiarder.

4 Signatur

Lad os et øjeblik se bort fra kravet om, at der netop skal være fem numre i hver række og blot overveje, hvilke begrænsninger der ligger i at placere femten numre på en plade, hvor ingen af de ni søjler må være tomme. Lad os for en forelagt bankoplade bruge henholdsvis i, j og k som betegnelse for antallet af søjler med netop 3 talpladser (ingen blanke felter), 2 talpladser (1 blankt felt) og 1 talplads (2 blanke), og lad os kalde triplet (i, j, k) for pladens *signatur*.

Signaturen for (1) er for eksempel $(1, 4, 4)$.

Det oprindelige krav 2. betyder, at signaturer må opfylde

$$\begin{aligned} 3i + 2j + k &= 15 \\ i + j + k &= 9 \end{aligned}$$

Ved subtraktion fås $2i + j = 6$, og da antallene skal være ikke-negative heltal, bliver der kun fire muligheder: $i = 3$, 2, 1 eller 0. Ved indsættelse findes fire mulige signaturer $(i, j, k) = (3, 0, 6)$, $(2, 2, 5)$, $(1, 4, 4)$ eller $(0, 6, 3)$. Det er let at se, at der faktisk også findes bankoplader med hver af de fire signaturer.

5 Mulige delmængder med femten numre

De delmængder af 15 numre, som kan komme på tale, skal have 1, 2 eller 3 numre i hver søjle. I de midterste søjler (s_1 til s_7) kan 1, 2 og 3 numre vælges på henholdsvis $\binom{10}{1}$, $\binom{10}{2}$ og $\binom{10}{3}$ måder; for forreste og bageste søjles vedkommende skal 10 udskiftes med 9 eller 11.

Det kunne være interessant at vide, hvor mange delmængder der kunne fremkomme på den måde. Her kommer metoden med *formelle frembringerfunktioner* os til hjælp. Frembringerfunktionen for valg af numre fra en af de midterste søjler er $\binom{10}{3}x^3 + \binom{10}{2}x^2 + \binom{10}{1}x$, og for hele pladen multiplicerer man de ni søjlers funktioner sammen. Frembringerfunktionen for valg af 1, 2 eller 3 numre fra hver søjle er

$$\begin{aligned}(\binom{9}{3}x^3 + \binom{9}{2}x^2 + \binom{9}{1}x) \cdot (\binom{10}{3}x^3 + \binom{10}{2}x^2 + \binom{10}{1}x)^7 \\ \cdot(\binom{11}{3}x^3 + \binom{11}{2}x^2 + \binom{11}{1}x)\end{aligned}$$

og det søgte antal delmængder er koefficienten til x^{15} i dette udtryk.

Til computere findes færdige programsystemer, som kan regne formelt med polynomier, og med sådan et system kan den søgte koefficient let bestemmes. Med lidt omhu er det dog ikke umuligt at foretage beregningerne uden computer. Udtrykket har værdien $(84x^3 + 36x^2 + 9x)(165x^3 + 55x^2 + 11x)(120x^3 + 45x^2 + 10x)^7 = 3x \cdot 11x \cdot (5x)^7(28x^2 + 12x + 3)(15x^2 + 5x + 1)(24x^2 + 9x + 2)^7$, og koefficienten til x^{15} er beregnet i tabel 1, hvor f_n er koefficienterne defineret ved $(28x^2 + 12x + 3)(15x^2 + 5x + 1) = \sum_{n=0}^{4} f_n x^n$. Her benyttes også *multinomialformlen*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} \binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

Værdien af *multinomialkoefficienterne* kan udregnes af

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

Resultatet bliver 6080.082602.343750, så det er kun cirka 13% af alle delmængder med 15 numre, som faktisk kan forekomme på en plade.

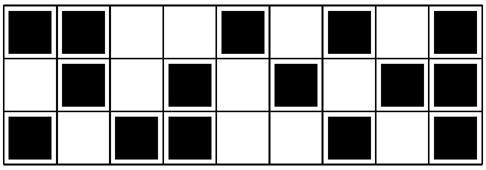
6 Belægninger

En bankoplade kan ikke entydigt fastlægges ud fra sine 15 numre, men det er klart, at hvis man tillige bestemmer, hvor de blanke felter skal være, så betyder krav 5, at numrene kun kan fyldes i på én måde. Det kunne derfor være nyttigt at se på fordelingen af de blanke felter og udfyldningen med numre hver for sig.

koefficient f_n	p	q	r	$f_n \cdot 24^p 9^q 2^r \binom{7}{p\ q\ r}$
$f_4 = 28 \cdot 15$	1	0	6	4.515840
	0	2	5	22.861440
$f_3 = 28 \cdot 5 + 12 \cdot 15$	1	1	5	92.897280
	0	3	4	130.636800
$f_2 = 28 \cdot 1 + 12 \cdot 5 + 3 \cdot 15$	2	0	5	51.480576
	1	2	4	434.367360
	0	4	3	244.331640
$f_1 = 12 \cdot 1 + 3 \cdot 5$	2	1	4	235.146240
	1	3	3	529.079040
	0	5	2	133.923132
$f_0 = 3 \cdot 1$	3	0	4	23.224320
	2	2	3	235.146240
	1	4	2	198.404640
	0	6	1	22.320522
				2358.335070
			$\cdot\, 3 \cdot 11 \cdot 5^7 =$	*6080.082602.343750*

Tabel 1: Antallet af delmængder med 15 numre, der er mulige på en bankoplade

Lad os kalde en plade, hvor det er besluttet, hvor der skal være numre, og hvor der skal være blanke felter, men hvor der endnu ikke er fyldt numre i, for en *belægning*. Her er for eksempel belægningen svarende til (1):



(3)

Selv om dette heller ikke besvarer vores hovedspørgsmål, kunne man spørge, hvor mange forskellige belægninger der egentlig findes?

Også her giver frembringerfunktioner et elegant svar. Et enkelt felt på pladen kan enten vælges som nummerfelt eller lades blankt og har frembringerfunktionen $x + 1$; de tre felter i en søjle ville så have frembringerfunktionen $(x+1)^3$, hvis man kunne vælge frit, men da søjlen ikke må lades helt blank, skal vi her bruge $(x+1)^3 - 1$. Da vi tillige ønsker at holde styr på de tre rækker hver for sig, kan vi kalde dem henholdsvis x, y og z og lade frembringerfunktionen for en søjle være

$$(x+1)(y+1)(z+1) - 1 = xyz + xy + xz + yz + x + y + z$$

Leddene svarer på oplagt måde til de syv muligheder for en søjle: y betyder kun et nummer i midterste række, xz to numre, hvor det ene står i øverste og det andet i nederste række, og så videre.

Frembringerfunktionen for en bankoplade med ni søjler bliver

$$((x+1)(y+1)(z+1) - 1)^9$$

I dette udtryk vil koefficienten til $x^p y^q z^r$ angive antallet af plader med henholdsvis p, q og r nummerfelter i hver af de tre rækker, og specielt vil koefficienten til $x^5 y^5 z^5$ være det efterspurgte antal lovlige belægninger.

Ved at bruge binomialformlen et par gange finder man denne koefficient til

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{i=0}^{4}(-1)^i\binom{9}{i}\binom{9-i}{5}^3\\ &=\binom{9}{0}\cdot\binom{9}{5}^3-\binom{9}{1}\cdot\binom{8}{5}^3+\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{5}^3-\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{5}^3+\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{5}^3\\ &=735210\end{aligned}$$

Samme formel kunne man i øvrigt være nået frem til ved at benytte princippet med "at medregne og udelukke", som kan findes beskrevet i enhver lærebog i kombinatorik.

7 Udfyldning

Det oprindelige krav 4. om, hvilke numre der skal stå i hvilke søjler, i forbindelse med kravet 5. om, at numre i samme søjle skal stå i stigende orden, betyder, at det er let at udregne antallet af måder, en søjle kan udfyldes på, når man ved, hvor mange numre der skal være i den. Hvis der er tale om en af søjlerne $s_1, s_2, \ldots, s_7$, som hver svarer til et interval med 10 mulige numre, er der henholdsvis $\binom{10}{1}$, $\binom{10}{2}$ eller $\binom{10}{3}$ muligheder efter som belægningen foreskriver 1, 2 eller 3 numre i den pågældende søjle. For s_0 og s_8 skal tallet 10 erstattes med henholdsvis 9 og 11.

Antallet af plader med belægningen (3) er derfor $\binom{9}{2}\binom{10}{3}^0\binom{10}{2}^3\binom{10}{1}^4\binom{11}{3} = 36\cdot 120^0\cdot 45^3\cdot 10^4\cdot 165 = 5.412825.000000$, og (1) er altså en af disse mange muligheder.

8 Bankoplader

Som vi netop fandt antallet af bankoplader med en bestemt belægning, kunne man i princippet gå de øvrige 735209 belægninger igennem og finde antallet af plader for hver af dem – men i praksis er det naturligvis uoverkommeligt.

Man kunne godt komme igennem ved at gruppere belægningerne i ækvivalensklasser med samme antal udfyldninger. Man kunne for eksempel regne to belægninger for ækvivalente, hvis den ene kunne føres over i den anden ved en permutation af rækkerne og af de midterste søjler s_1 til s_7, men der ville blive 146 forskellige klasser, og beregningerne ville blive lidt omstændelige.

Det er smartere endnu en gang at benytte frembringerfunktioner. For at man kan tælle antallet af udfyldte bankoplader, skal hver af de indre søjler åbenbart give anledning til multiplikation med henholdsvis $\binom{10}{3}$, $\binom{10}{2}$ eller $\binom{10}{1}$, efter som der er valgt 3, 2 eller 1 felt fra denne søjle. For forreste og bageste søjle skal 10 erstattes med henholdsvis 9 og 11. Frembringerfunktionen for plader uden tomme søjler bliver derfor

$$\begin{aligned}&\left(\binom{9}{3}xyz+\binom{9}{2}(xy+xz+yz)+\binom{9}{1}(x+y+z)\right)\\ &\cdot\left(\binom{10}{3}xyz+\binom{10}{2}(xy+xz+yz)+\binom{10}{1}(x+y+z)\right)^7\\ &\cdot\left(\binom{11}{3}xyz+\binom{11}{2}(xy+xz+yz)+\binom{11}{1}(x+y+z)\right)\end{aligned}$$

og det søgte antal lovlige bankoplader er koefficienten til $x^5y^5z^5$ i dette udtryk.

Med et programsystem til symbolsk regning aflæses denne koefficient til tallet 3.669688.706217.187500; tabel 2 viser, hvordan man med lidt tålmodighed også kan finde værdien uden brug af edb. Lad os indføre betegnelserne u, v og w for $u = xyz$, $v = xy + xz + yz$ og $w = x + y + z$[1]. En fuldstændig beregning af $3 \cdot 11 \cdot 5^7(28u + 12v + 3w)(15u + 5v + w)(24u + 9v + 2w)^7$ er ikke nødvendig, for kun produkter af formen $u^iv^jw^k$, hvor (i, j, k) er en af de fire signaturer, kan indeholde led af formen $x^5y^5z^5$.

signatur (i,j,k)	koefficient til $x^5y^5z^5$ i $u^iv^jw^k$	faktor f	p	q	r	$f \cdot 24^p 9^q 2^r \binom{7}{p\ q\ r}$
$(3,0,6)$	90	$28 \cdot 15$	1	0	6	4.515840
		$28 \cdot 1 + 3 \cdot 15$	2	0	5	28.256256
		$3 \cdot 1$	3	0	4	23.224320
						55.996416
		$\cdot\ 90 =$				*5039.677440*
$(2,2,5)$	240	$28 \cdot 15$	0	2	5	22.861440
		$28 \cdot 5 + 12 \cdot 15$	1	1	5	92.897280
		$28 \cdot 1 + 3 \cdot 15$	1	2	4	238.412160
		$12 \cdot 5$	2	0	5	23.224320
		$12 \cdot 1 + 3 \cdot 5$	2	1	4	235.146240
		$3 \cdot 1$	2	2	3	235.146240
						847.687680
		$\cdot\ 240 =$				*203445.043200*
$(1,4,4)$	639	$28 \cdot 5 + 12 \cdot 15$	0	3	4	130.636800
		$28 \cdot 1 + 3 \cdot 15$	0	4	3	134.106840
		$12 \cdot 5$	1	2	4	195.955200
		$12 \cdot 1 + 3 \cdot 5$	1	3	3	529.079040
		$3 \cdot 1$	1	4	2	198.404640
						1188.182520
		$\cdot\ 639 =$				*759248.630280*
$(0,6,3)$	1710	$12 \cdot 5$	0	4	3	110.224800
		$12 \cdot 1 + 3 \cdot 5$	0	5	2	133.923132
		$3 \cdot 1$	0	6	1	22.320522
						266.468454
		$\cdot\ 1710 =$				*455661.056340*
						1.423394.407260
		$\cdot\ 3 \cdot 11 \cdot 5^7 =$				**3.669688.706217.187500**

Tabel 2: Antallet af lovlige bankoplader

At kun 13% af delmængderne med 15 elementer kunne bruges, opvejes altså langt af, at hver af de delmængder, som kan forekomme, i gennemsnit kan udformes til en bankoplade på mere end 600 måder. Med mellem 6 og 7 milliarder mennesker på jorden kan der blive flere end 500 millioner plader til hver, selv om de alle skal være forskellige.

[1]Disse udtryk kaldes de tre første *elementarsymmetriske polynomier*